Przykład 2

Statystyczna prognoza obciążenia konstrukcji

Obserwacje symulowane:

$n := 20 \quad x := \mathrm{runif}(n, 0, 1)$

$u := 4.2 \quad S_o := 30 \quad S := \overrightarrow{S_o - u \cdot \ln(-\ln(x))}$

Obserwacje jednorocznych maksimów obciążenia śniegiem S [kN/m^2]
jako nieskorelowane realizacje ergodycznego procesu losowego

$t_o := 20$ Okres obserwacji [lat] $n := t_o$ $n = 20$

Wartość charakterystyczna S_k maksimów jednorocznych,
kwantyl 2% - owy w okresie odniesienia $t_{ref} := 50$
- o prawdopodobieństwie przewyższenia p=1/50

Prawdopodobieństwo $S>S_{max}$ $p := 0.02$

Prawdopodobieństwo $S<S_{max}$ $q := 0.98$

Metody weryfikacji i estymacji:

1 - momentów, **2** - kolokacji, **3** - wiarogodności

Hipotetyczne rozkłady prawdopodobieństw:

A = normalny Gaussa, **C** = ekstremalny Gumbela

Program komputerowy: Mathcad 11.0 lub Mathcad PLUS 6.0

$\mathrm{hnorm}(t) := \dfrac{\mathrm{dnorm}(t, 0, 1)}{\mathrm{pnorm}(t, 0, 1)}$ funkcja ryzyka normalnego

Wartości iterowane: w kolorze

S =

	0
0	22.03
1	27.91
2	32.62
3	29.8
4	36.87
5	27.65
6	34.51
7	29.27
8	26.34
9	27.27
10	48.73
11	26.83
12	23.48
13	31.93
14	32.85
15	27.54

Metoda 1. Momentów rozkładu statystycznego - numeryczna

Statystyki empirycznego rozkładu prawdopodobieństw

$S_m := \mathrm{mean}(S)$	średnia arytmetyczna	$S_m = 30.49$
$\sigma := \mathrm{stdev}(S)$	odchylenie standardowe z próby	$\sigma = 5.68$
$Sk(S) := \dfrac{\sum \overrightarrow{\left(S - S_m\right)^3}}{n \cdot \sigma^3}$	skośność z próby	$\boxed{Sk(S) = 1.45}$

Weryfikacja typu rozkładu prawdopodobieństw

Skośność rozkładów Gaussa Sk=0	**A. -** Sk(S)>>0	negatywna
Skośność rozkładów Gumbela Sk=1.14	**C. -** Sk(S)>1.14	pozytywna

Estymacja wartości charakterystycznej

A

$t := \mathrm{qnorm}(0.98, 0, 1)$ wskaźnik kwantyla rozkładów normalnych

$S_k := S_m + 2.05 \cdot \sigma$ wartość charakterystyczna $S_k = 42.13$

Wzór równoważny: $\mathrm{qnorm}\left(0.98, S_m, \sigma\right) = 42.15$

C

$S_o := S_m - 0.45 \cdot \sigma$ wartość centralna (kwantyl $e^{-1)}$ $S_o = 27.94$

$u := \frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot \sigma$ odchylenie gumbelowskie $u = 4.43$

$-\ln(-\ln(0.98)) = 3.9$ $\ln(50) = 3.91$ $S_k := S_o + 3.9 \cdot u$ $S_k = 45.2$

gdzie $C \cdot \frac{\sqrt{6}}{\pi} = 0.78C$ współczynnik centrujący dla maksimum charakterystycznego $C := 0.577216$ - stala Eulera

---

Statystyka t-niecentralne stosowana jest, gdy niewielka liczebność próby może powodować istotny błąd statystyczny i potrzebę ostrożnej estymacji

$t_{pc} := 2.21$ wg ISO 12491/Tabl.6 - dla wadliwości p=0.02 i ufności c=0.90 i rozkładu Gaussa

$S_{k.c} := S_m + t_{pc} \cdot \sigma$ - górne oszacowanie wartości charakterystycznej $S_{k.c} = 43.04$

Metoda 2. Kolokacji dystrybuanty teoretycznej i empirycznej - graficzna

Wykres kumulacyjny danych empirycznych

Kresy wyników próby $\min(S) = 22.03$ $\max(S) = 48.73$ po zaokrągleniu: Min=25, Max=60

7 przedziałów o długości Δ=(60-25)/7=5 i numerach: $j := 0..6$ $int_j := 25 + 5 \cdot j$

Histogram - o rzędnych $f_S := \text{hist}(int, S)$

Dystrybuanta skorygowana

$$F_{S_0} := \frac{f_{S_0}}{n+1} \quad j := 1..5 \quad F_{S_j} := F_{S_{j-1}} + \frac{f_{S_j}}{n+1} \quad f_S = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_S = \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.71 \\ 0.81 \\ 0.81 \\ 0.86 \\ 0.86 \end{pmatrix} \quad int = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 35 \\ 40 \\ 45 \\ 50 \\ 55 \end{pmatrix}$$

Weryfikacja typu rozkładu prawdopodobieństw

Rektyfikacja czyli wkreślenie prostej F(S) między punkty wykresu kumulacyjnego F_{Sj} według oceny wizualnej - na arkuszu **A** daje mniejsze odchyłki niż - na arkuszu **C**

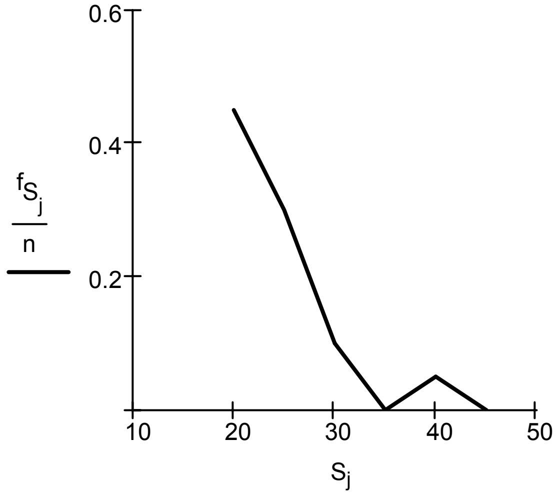
Estymacja wartości charakterystycznej S_k na papierze A

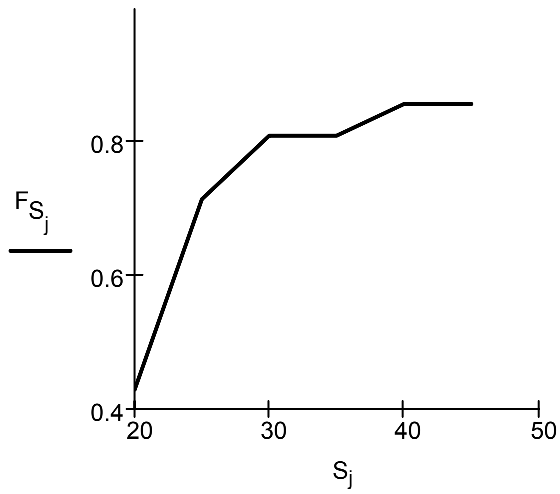
Ekstrapolacja prostej F(S) do przecięcia z linią poziomą o rzędnej q=0.98 daje punkt o odciętej S_k=45.2 - oszacowanie wartości charakterystycznej

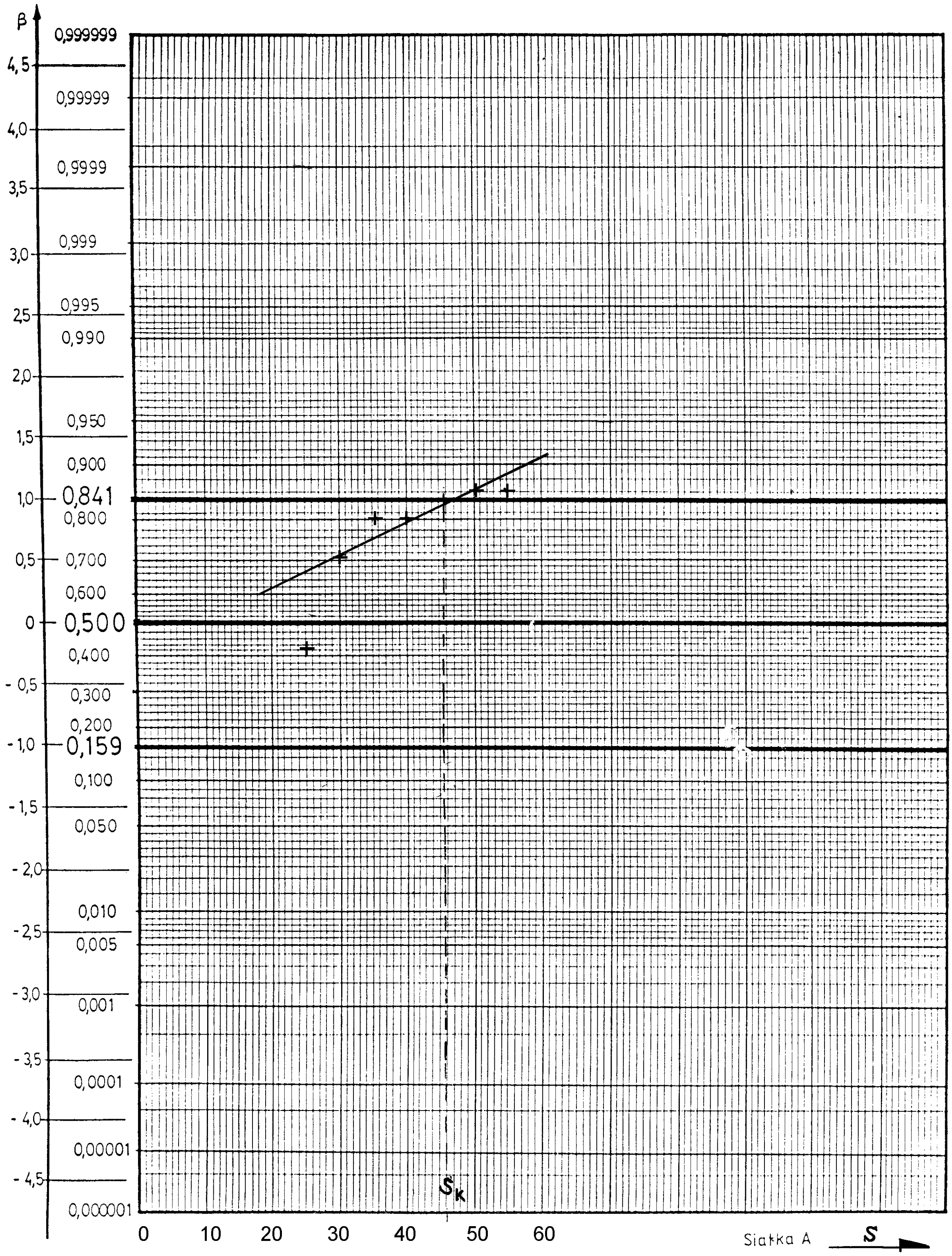
---

Parametry rozkładu: wartość średnia S_d=33 - odcięta punktu o rzędnej F(0)=0.5 na prostej; odchylenie standardowe s =8 różnica odciętych 45 - 37 dla odciętych F(1)=0.84 i F(0)=0.5

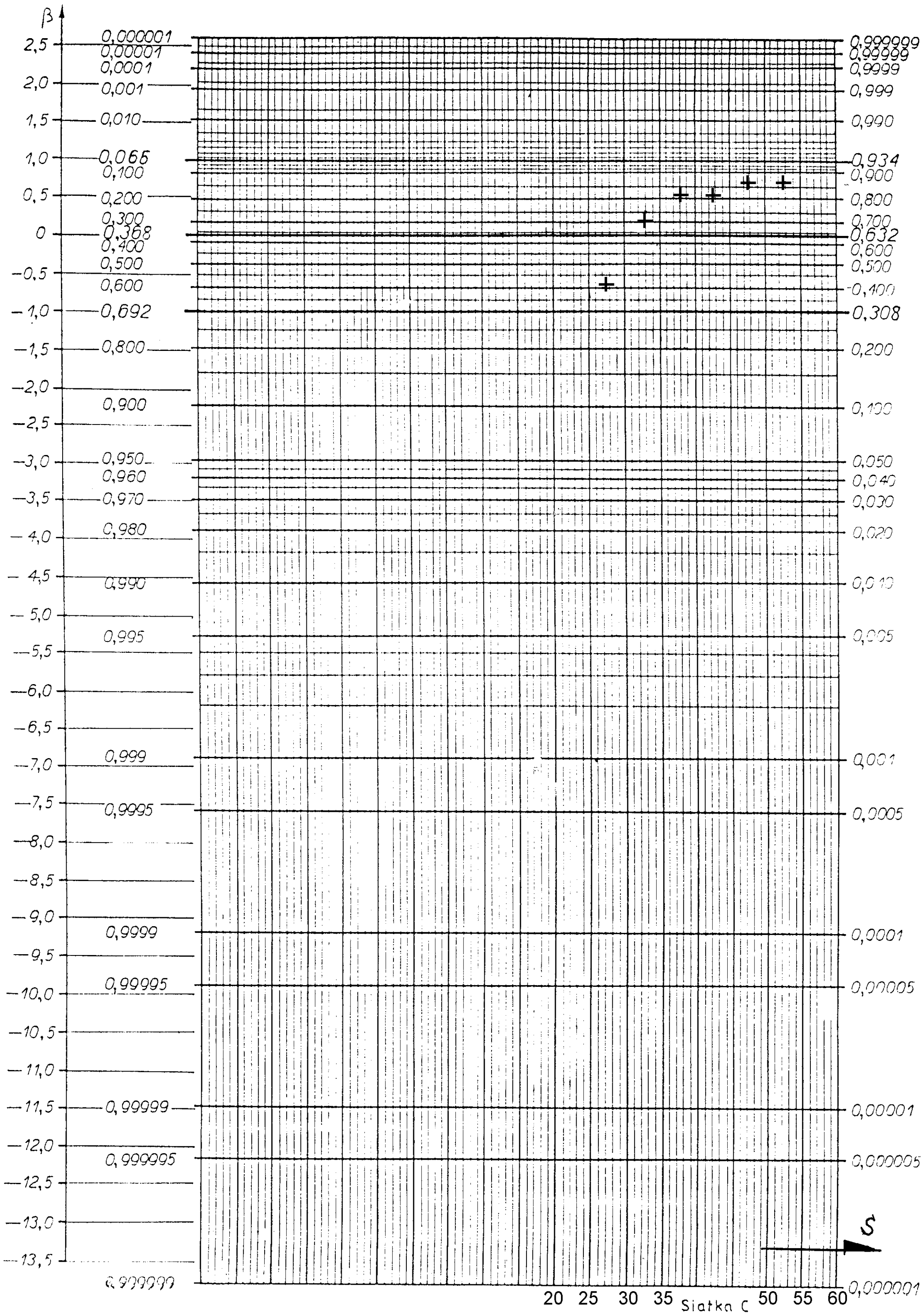
$j := 0..5$ $S_j := 20 + 5 \cdot j$ $n = 20$







β
0,999999
4,5
0,99999
4,0
0,9999
3,5
0,999
3,0
0,995
2,5
0,990
2,0
0,950
1,5
0,900
1,0
0,841
0,800
0,5
0,700
0,600
0
0,500
0,400
- 0,5
0,300
0,200
- 1,0
0,159
0,100
- 1,5
0,050
- 2,0
0,010
- 2,5
0,005
- 3,0
0,001
- 3,5
0,0001
- 4,0
0,00001
- 4,5
0,000001
0
10
20
30
40
50
60
S_K
Siatka A
S


β
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
-0,5
-1,0
-1,5
-2,0
-2,5
-3,0
-3,5
-4,0
-4,5
-5,0
-5,5
-6,0
-6,5
-7,0
-7,5
-8,0
-8,5
-9,0
-9,5
-10,0
-10,5
-11,0
-11,5
-12,0
-12,5
-13,0
-13,5
0,000001
0,00001
0,0001
0,001
0,010
0,065
0,100
0,200
0,300
0,368
0,400
0,500
0,600
0,692
0,800
0,900
0,950
0,960
0,970
0,980
0,990
0,995
0,999
0,9995
0,9999
0,99995
0,99999
0,999995
0,999999
0,999999
0,99999
0,9999
0,999
0,990
0,934
0,900
0,800
0,700
0,632
0,600
0,500
0,400
0,308
0,200
0,100
0,050
0,040
0,030
0,020
0,010
0,005
0,001
0,0005
0,0001
0,00005
0,00001
0,000005
0,000001
S
20 25 30 35 Siatka C 50 55 60

Metoda 3. Wiarogodności próby empirycznej - analityczna

Weryfikacja typu rozkładu prawdopodobieństw

A $S_m = 30.49$ parametry największej wiarogodności rozkładu prawdopodobieństw Gaussa

$\sigma = 5.68$

$f_A := \overrightarrow{\mathrm{dnorm}(S, S_o, \sigma)}$ $\quad \ln L_A := -\sum \overrightarrow{\ln(f_A)}$

$\ln L_A = 71.68$ wiarogodność rozkładu **A** (Gaussa)

C $\boxed{S_k := 29.97}$ $\boxed{u := 6.27}$ parametry największej wiarogodności rozkładu prawdopodobieństw Gumbela wynikają z rozwiązania układu równań nieliniowych

Given $\sum \overrightarrow{\exp\left(\frac{S_k - S}{u}\right)} = n$ $\quad \sum \overrightarrow{\left[\frac{S_k - S}{u} \cdot \left(\exp\left(\frac{S_k - S}{u}\right) - 1\right)\right]} = n$ $\quad \boxed{\mathrm{Find}(S_k, u) = \begin{pmatrix} 28.24 \\ 5.5 \end{pmatrix}}$

$i := 0, 1 .. 19$ $\quad f_{C_i} := \frac{1}{u} \cdot \exp\left(\frac{S_o - S_i}{u}\right) \cdot \exp\left(-\exp\left(\frac{S_o - S_i}{u}\right)\right)$

$\ln L_C := -\sum \overrightarrow{\ln(f_C)}$ wiarogodność rozkładu **C** (Gumbela) $\quad \ln L_C = 65.93$

Wniosek : $\ln L_A > \ln L_C = 1$ rozkład Gumbela bardziej wiarogodny

Estymacja wartości charakterystycznej - modalnej w rozkładzie Gumbela $\quad e^{-1} = 0.37$

$S_k := S_m - C \cdot u$ $\quad C = 0.58$ -stala Eulera $\quad F(S_k) := \exp\left(-\exp\left(-\frac{S_k - S_k}{u}\right)\right)$ $\quad F(S_k) = 0.37$

Kolokacja analityczna rozkładu Gumbela i Gaussa $\quad S_k = 26.87$

$\beta_C := -\ln(-\ln(p))$ $\quad \beta_A := \mathrm{qnorm}\left(e^{-1}, 0, 1\right)$ Wskaźniki wartości charakterystycznej $\quad \beta_A = -0.34$

$S_k := S_m - u \cdot \ln(-\ln(p))$ $\quad \sigma := u \cdot \mathrm{hnorm}(-\beta_A) \cdot \exp(\beta_C)$ $\quad S_k = 21.94$ $\quad \sigma = 0.96$